

Der Aharonov-Bohm Effekt

oder

“Sind nichtobservable Größen physikalisch?”

Heinrich Päs

Institut für Theoretische Physik, Universität Würzburg

und

University of Hawaii at Manoa, Honolulu, USA

Probevorlesung zur Habilitation an der Universität Würzburg

- Potentiale in klassischer Physik und Quantenmechanik
- \vec{A} ohne \vec{B} : unendlich lange Spule
- Doppelspaltexperiment mit unendlich langer Spule
 - $|\psi|^2$
 - Eichinvarianz?
 - Interferenzmuster?
 - Experimentelle Ergebnisse?
- Interpretation

Ernst Mach (1838-1916)
österreichischer Physiker und Philosoph



Credo des Positivismus:

- **Eliminierung überflüssiger methaphysischer Konzepte** aus der Physik
- **Theorien sollten nur observable Größen enthalten**

Inspiration für:

- Einstein: Eliminierung des Aethers
- Einstein: keine Unterscheidung zwischen freiem Fall und Schwerelosigkeit
- Heisenberg: Eliminierung des Bahnbegriffs aus der Quantenmechanik

Frage: **Sind nichtobservable Größen immer aus der Theorie eliminierbar?**

Potentiale in der klassische Physik

- Die Kraft bestimmt die Dynamik:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Relevante Größen: elektrische und magnetische Felder \vec{E} und \vec{B}

- Was ist mit \vec{A} und ϕ ?

$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ lässt sich aus geschwindigkeitsabhängigem Potential ableiten:

$$U = -\int \vec{F} d\vec{r} = q\phi - q\vec{v}\vec{A}$$

Eichfreiheit: $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ und $\phi' = \phi - q\frac{\partial\chi}{\partial t}$ mit beliebiger skalarer Funktion χ ohne Effekt auf $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ und $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$

\vec{A} und ϕ sind nicht eindeutig!

Aber: **Skalar- und Vektorpotentiale** \vec{A} und $\phi \rightarrow$ **reine Hilfskonstruktionen** und aus der Theorie **vollständig eliminierbar**



Potentiale in der Quantenmechanik

Finde Operator-wertige Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_j, \dot{q}_j)$$

mit

$$L = T - U = \frac{m}{2} v^2 - (q\phi - q\vec{v}\vec{A})$$

Generalisierte Impulse:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = mv_i + qA_i$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

$$\text{mit } p = \hbar k \rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

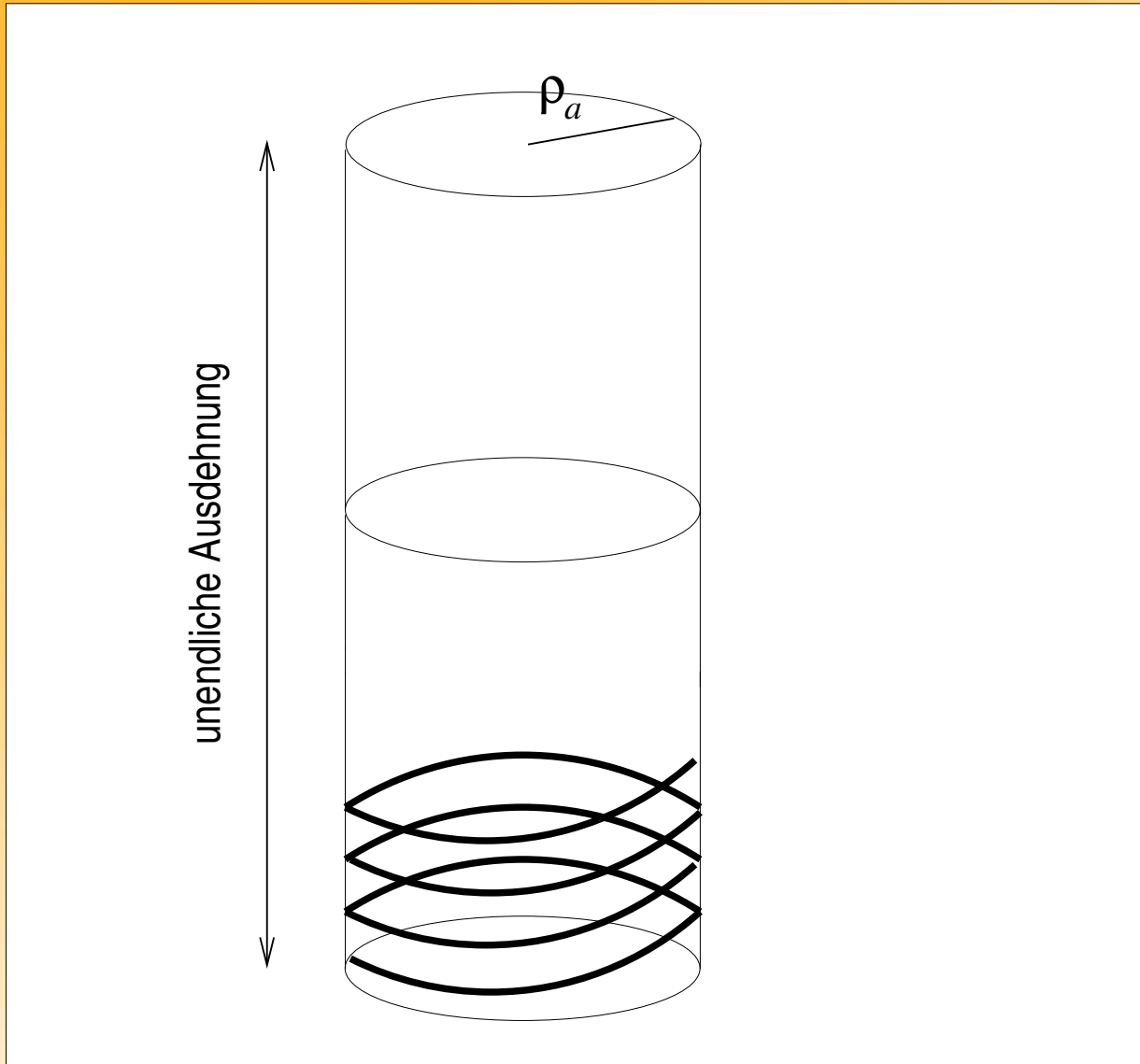
$$H\psi = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi \right) \psi = E\psi$$

(stationäre) Schrödingergleichung enthält ϕ und \vec{A} !

Frage: Haben ϕ , \vec{A} in der Quantenmechanik einen physikalischen Effekt?

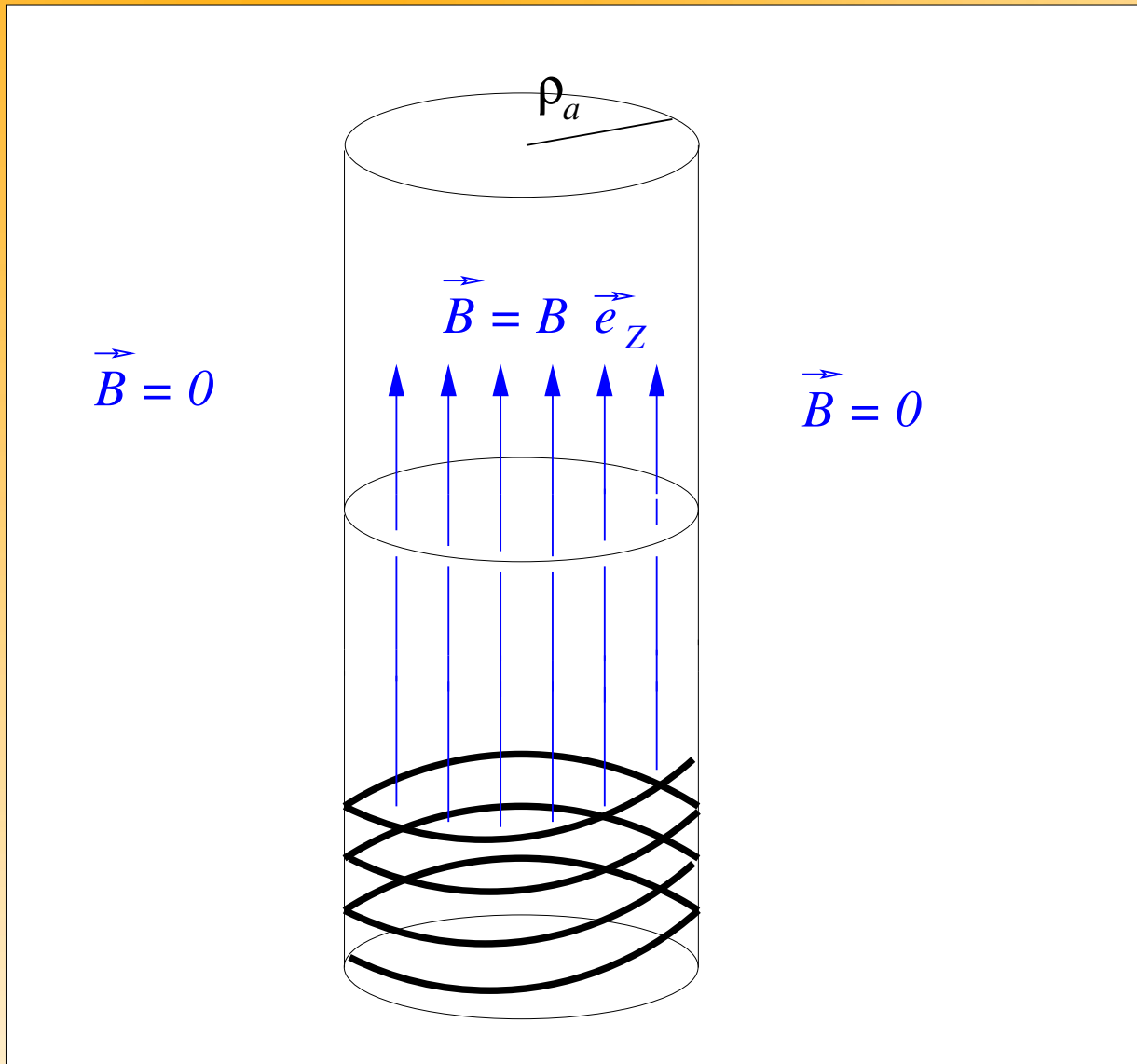
\vec{A} ohne \vec{B} : Feld einer unendlich langen Spule

Betrachte: unendliche lange Spule



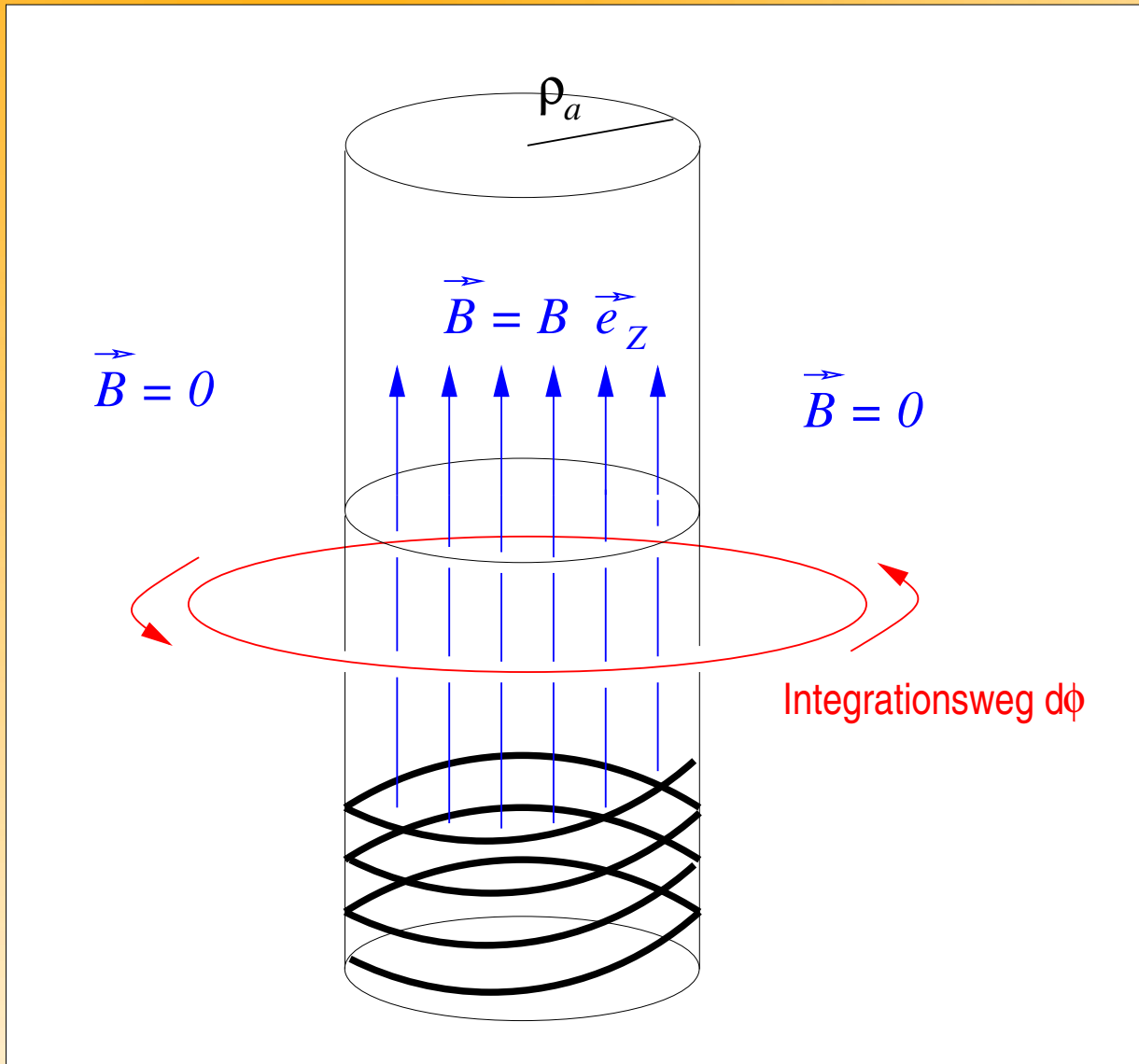
\vec{A} ohne \vec{B} : Feld einer unendlich langen Spule

Betrachte: unendliche lange Spule – ist $\vec{A} \neq 0$ für $\rho > \rho_a$?



Bestimmung des Vektorpotentials

Integrationswege in Zylinderkoordinaten:



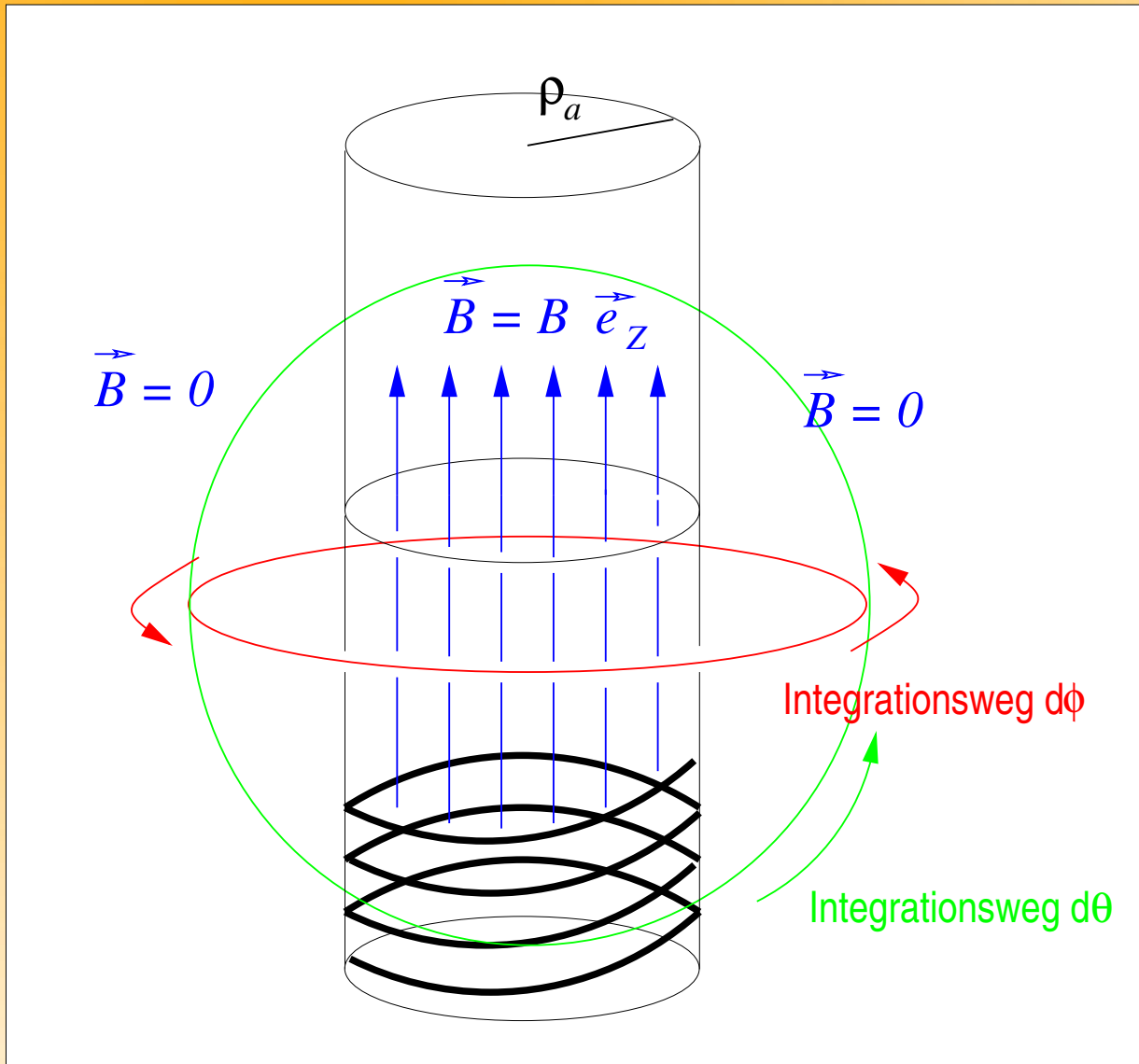
Stoke's Satz:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

$$\int \vec{B} d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

Bestimmung des Vektorpotentials

Integrationswege in Zylinderkoordinaten:



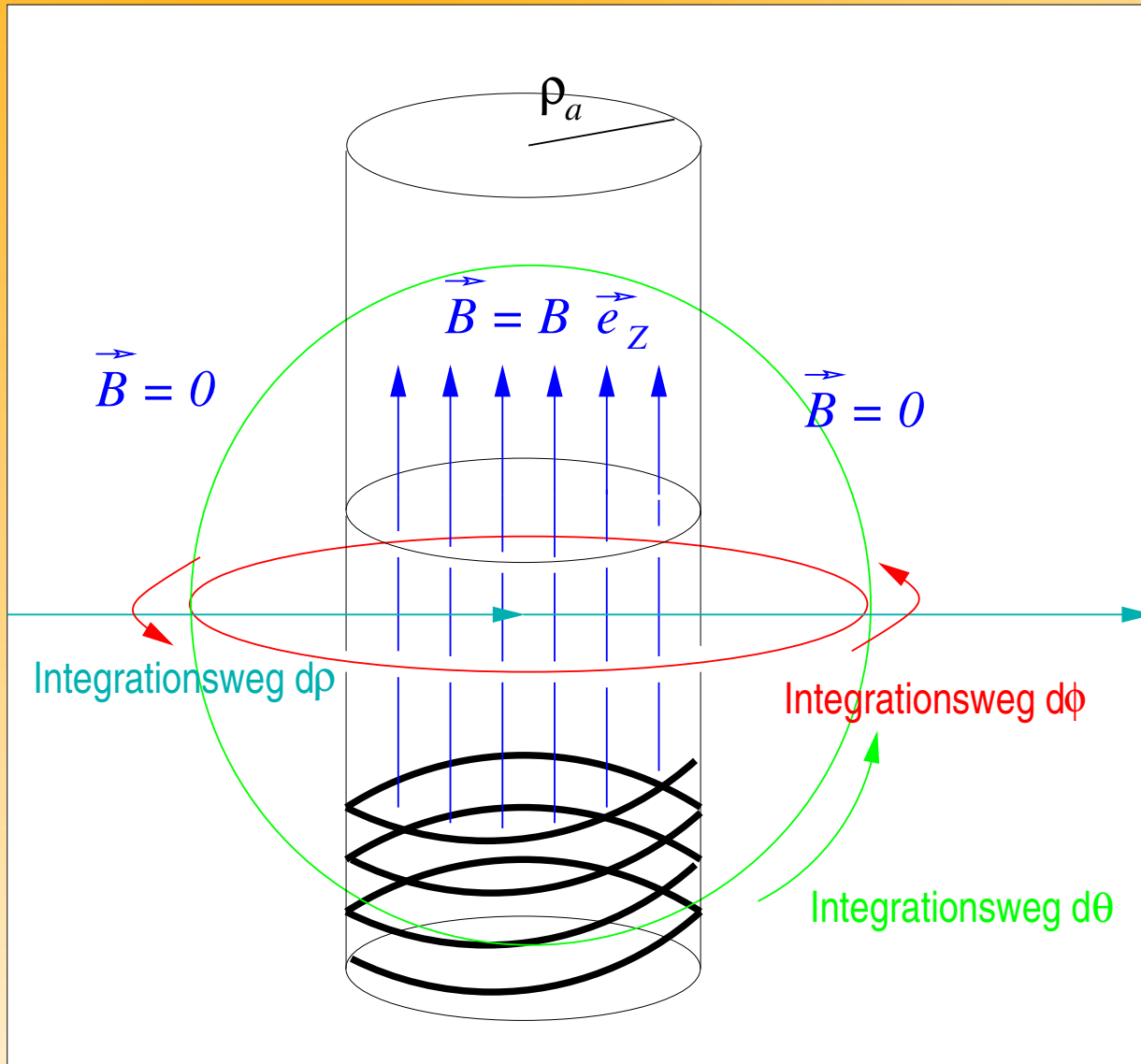
Stoke's Satz:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

$$\int \vec{B} d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

Bestimmung des Vektorpotentials

Integrationswege in Zylinderkoordinaten:



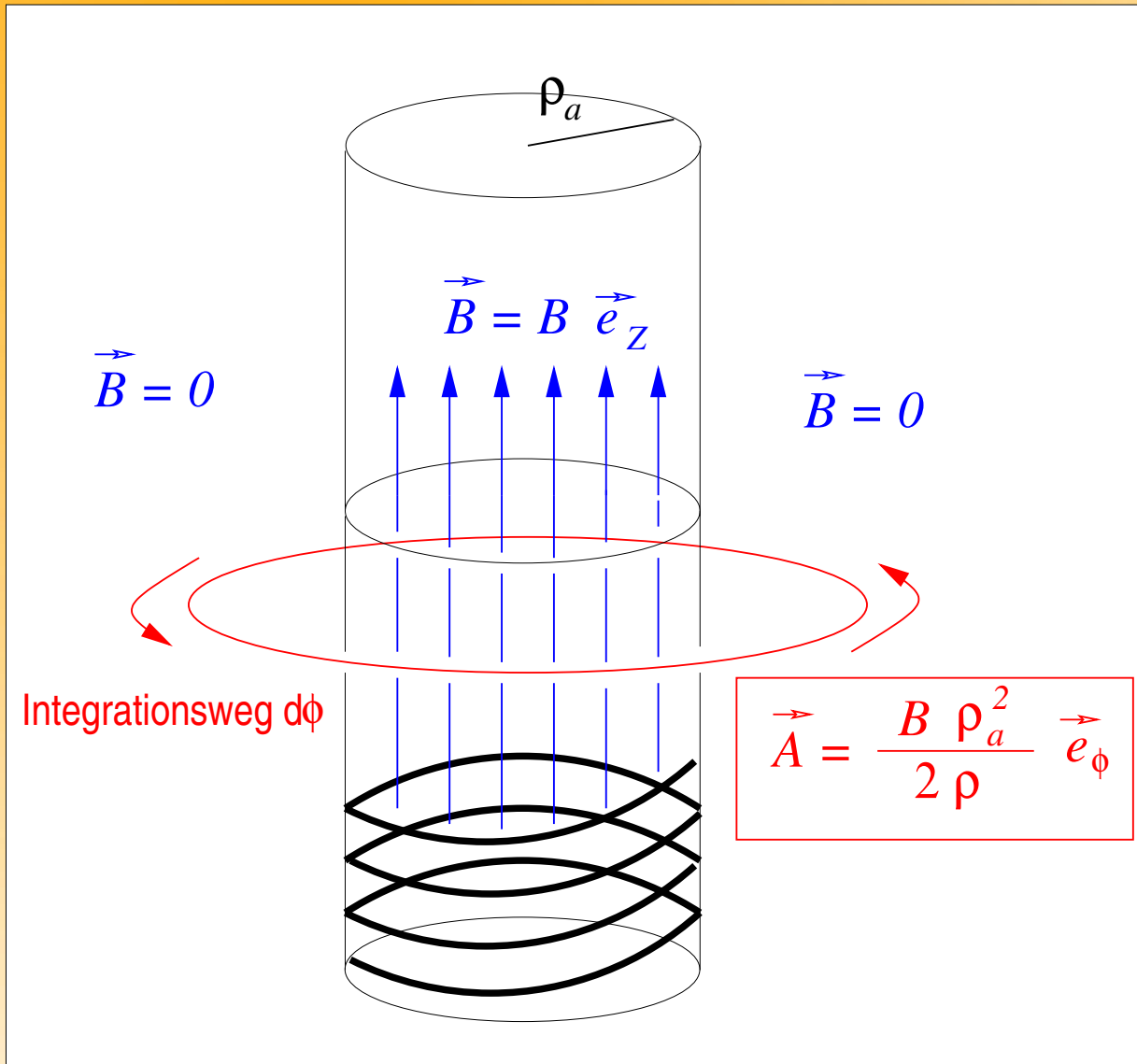
Stoke's Satz:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

$$\int \vec{B} d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{r}$$

Bestimmung des Vektorpotentials

nur ϕ -Integration schließt Magnetfluss ein!



$$\int (\vec{B}) d\vec{F} = \oint \vec{A} \vec{e}_\phi d\phi$$

Symmetrie: $\vec{A} \equiv \vec{A}(\rho)$

$\rho < \rho_a$:

$$B\pi\rho^2 = \vec{A}(\rho)2\pi\rho\vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow A_\phi = \frac{B\rho}{2}$$

$\rho > \rho_a$:

$$B\pi\rho_a^2 = \vec{A}(\rho)2\pi\rho\vec{e}_\phi$$

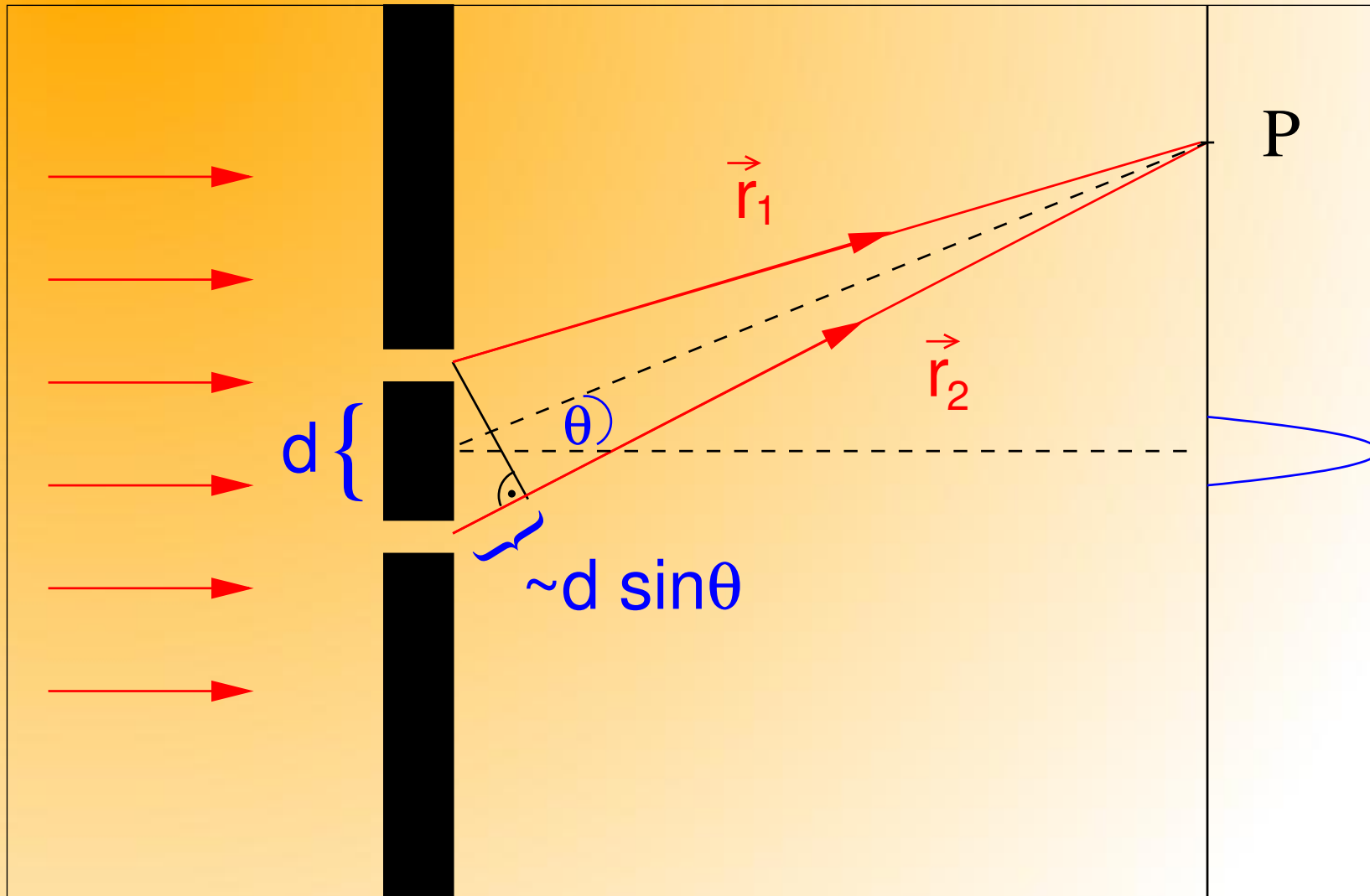
$$\Rightarrow A_\phi = \frac{B\rho_a^2}{2\rho}$$

Bestimmung des Vektorpotentials

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \frac{\rho_a^2}{2\rho} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = 0$$

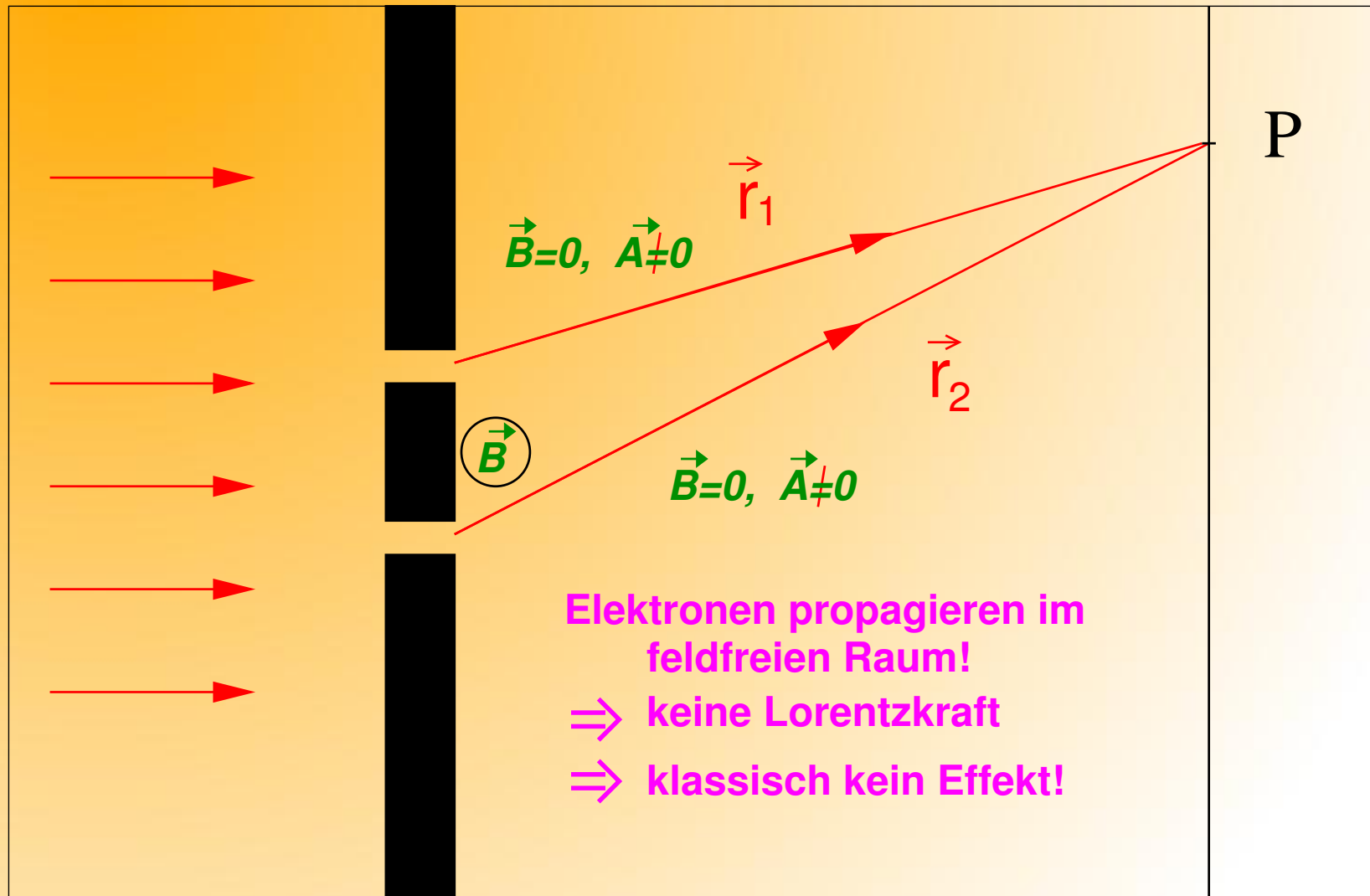


Doppelspaltexperiment - Erinnerung



Bestimme $\rho = |\psi|^2$ an Punkt P

Doppelspaltexperiment mit eingeschlossenem Magnetfeld



Änderung in $\rho = |\psi|^2$ an Punkt P ?

Zwischenzusammenfassung

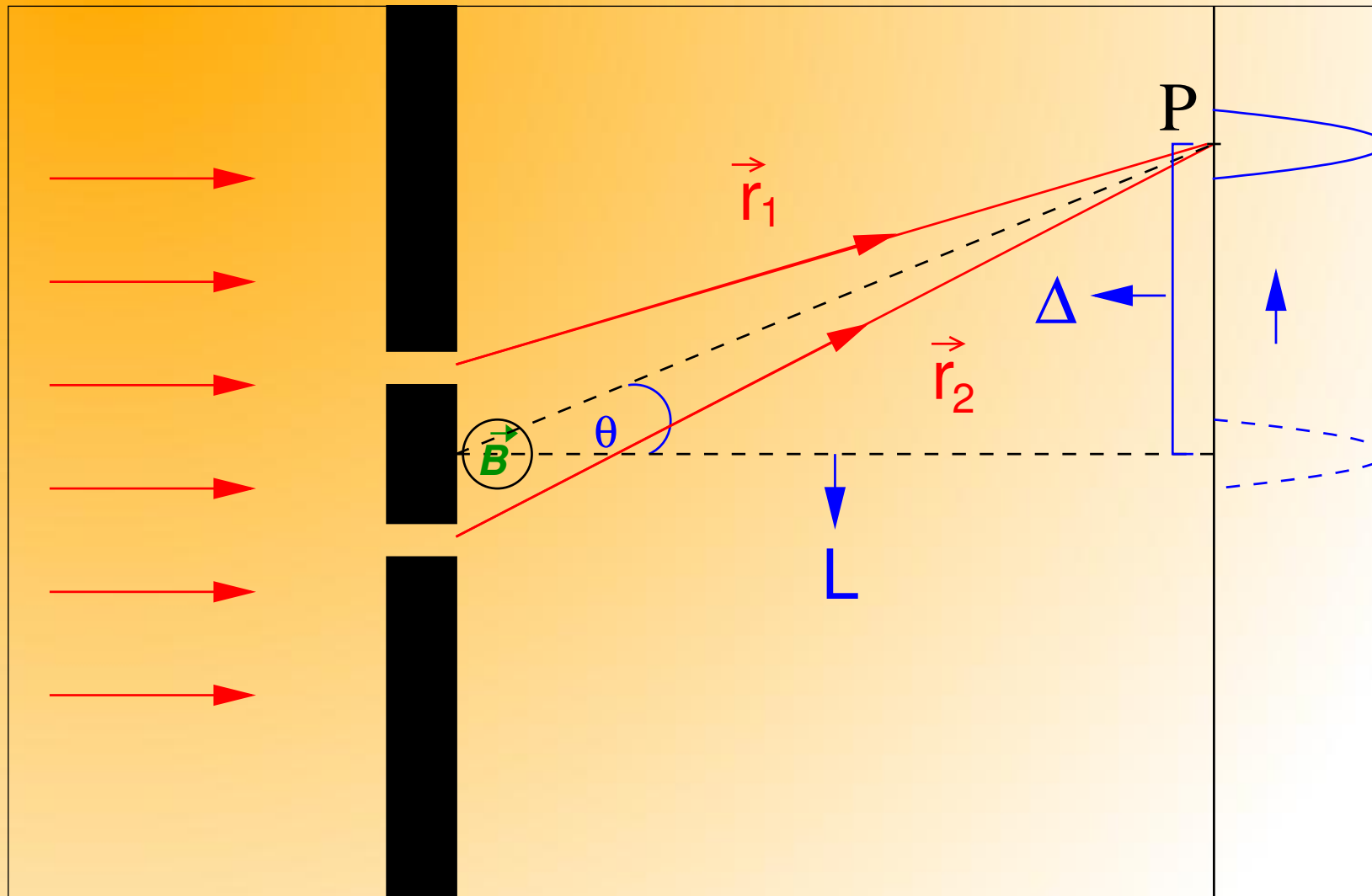
Fakt: Ein Magnetfeld in einem unzugänglichen Bereich beeinflusst via \vec{A} die Phasen von Elektronen im feldfreien Bereich (keine Lorentzkraft!)



Fragen:

- **Eichinvarianz?** Warum lösst sich \vec{A} für $\vec{B} = 0$ nicht **wegeichen**?
- Wie sieht der Effekt auf das **Interferenzmuster** aus?
- Was sagt das **Experiment**?

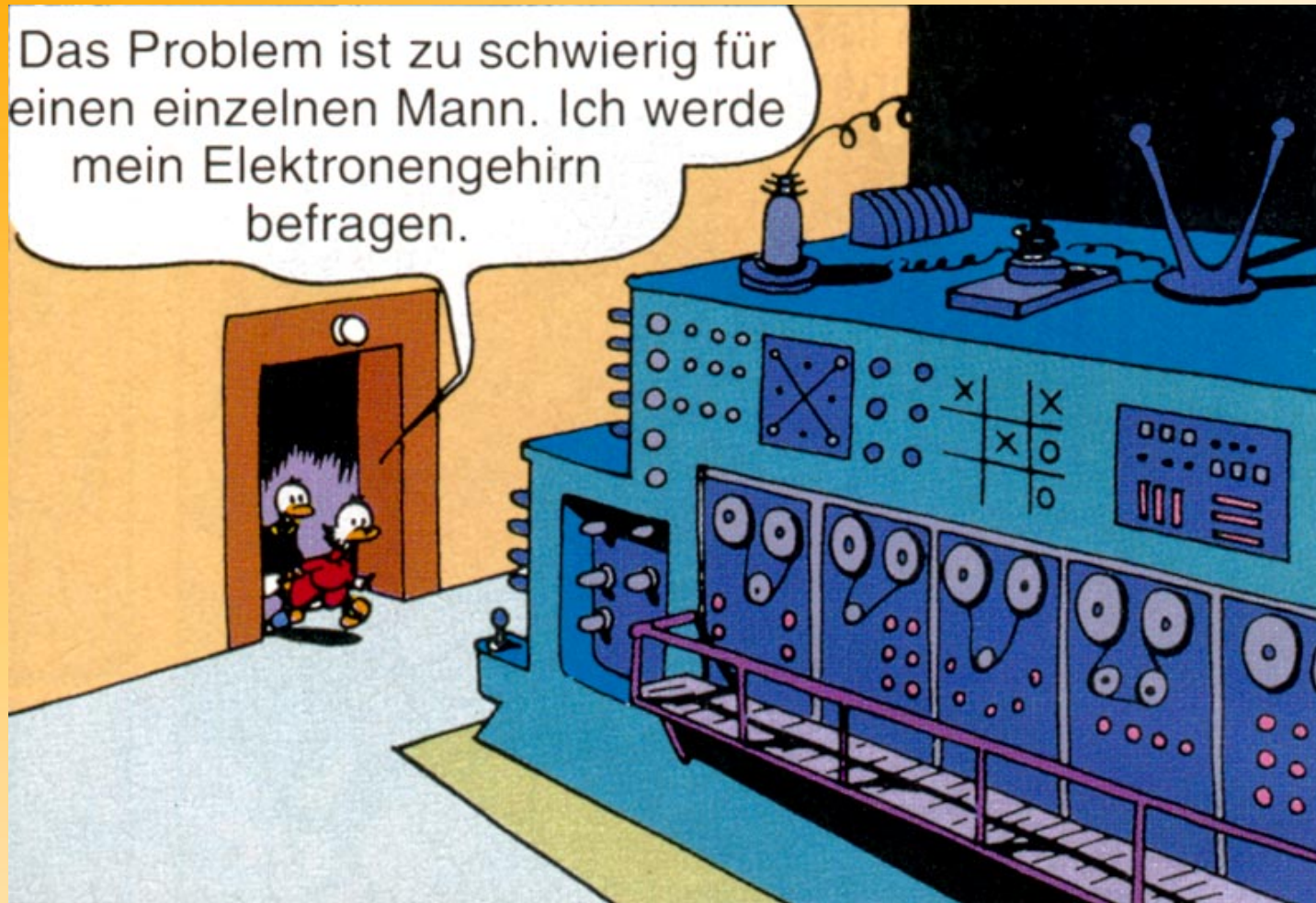
Verschiebung des Interferenzmusters im Aharonov-Bohm-Effekt



$$\sin \theta = \frac{\Delta}{L}$$

Verschiebung des Interferenzmusters im Aharonov-Bohm-Effekt

Wie sieht das gesamte Interferenzmuster aus?



→ Videos von K. Michielsen und H. De Raedt (Groningen)

Zeittafel: der Disput über den Aharonov-Bohm-Effekt

1949: Ehrenberg und Siday: **erste Arbeit** über AB Effekt

1959: **Aharonov-Bohm-Arbeit**

1960: Chambers: erste experimentelle Bestätigung

1978: Bocchieri und Loinger: **AB-Effekt ist "mathematische Erfindung"**, experimentelle Ergebnisse durch **Leckage magnetischer Felder** oder **Eindringen der Elektronenwelle** in Magnet

Problem: winzige Elektronenwellenlänge

1982: Tonomura: **Torus-förmiges Magnetfeld**, **quantitative Messung der magnetischen Leckage** durch Elektronenholographie

1982: Möllenstedt, Schmid und Lichte: Verwendung einer **in mit Goldschicht bedeckter Glasröhre eingeschlossenen Spule** ($80\mu m$) bei $200\mu m$ Strahlseparation

- **Keine Phasenverschiebung**: Strahlen, die Magnet **seitlich passieren**
- **Phasenverschiebung**: Strahlen, die Magnet **einschliessen** \leftrightarrow Theorie auf **3 %**

Interpretation

- Lokal observable \vec{E} - und \vec{B} -Felder liefern **unzureichende Beschreibung** der Physik
- Nichtobservable Potentiale ϕ und \vec{A} liefern **hinreichende, aber nicht notwendige** Information (Eichfreiheit)
- **Hinreichende und notwendige Beschreibung** durch Phasenfaktoren

$$\exp\left(\frac{iq}{\hbar} \oint \vec{A}(r) d\vec{r}\right) = \exp\left(\frac{iq}{\hbar} \Phi_B\right)$$

- **Fakt ist: kein Experiment an irgendeinem lokalen Punkt der Elektronpfade kann zwischen dem Fall mit eingeschlossenem Magnetfeld und dem feldfreien Fall unterscheiden!**

Zusammenfassung

- Klassische Physik: \vec{E} - und \vec{B} -Felder bestimmen Dynamik über Lorentzkraft
- Aharonov-Bohm-Effekt: Eingeschlossenes Magnetfeld beeinflusst Phasenfaktoren über \vec{A} im Feldfreien Raum:
 - Der Effekt ist eichinvariant
 - resultiert in einer Verschiebung des Interferenzmusters
 - im Experiment bestätigt
 - Ein analoger Effekt für das Skalarpotential existiert
- Lokal nichtobservable Größen sind fundamentaler Bestandteil der Quantenmechanik (Widerspruch zum positivistischen Credo!)
- Ausblick: Eichfelder spielen wesentliche Rolle bei der Formulierung von Quantenfeldtheorien als Eichtheorien